Representations of Algebraic Supergroups

著者	柴田 大樹
内容記述	この博士論文は内容の要約のみの公開（または一部非公開）になっています
発行年	2016
その他のタイトル	スーパー代数群の表現
学位授与大学	筑波大学 (University of Tsukuba)
学位授与年度	2015
報告番号	12102甲第7633号
URL	http://hdl.handle.net/2241/00144153

数理物質科学研究科　博士論文の要約

専 攻 名	数学
学籍番号	201330081
学生氏名	柴田　大樹
学 位 名	博士（理学）
指導教員	増岡　彰

博士論文題目　**Representations of Algebraic Supergroups**
(スーパー代数群の表現)

背景．

Grothendieck による関手的見地に立てば，**アフィン群** (**スキーム**) とは可換代数の圏から群の圏への表現可能な関手のことである．米田の補題により，アフィン群を表現する可換代数は一意的にホップ代数の構造をもち，勝手な可換環 $\Bbbk$ 上アフィン群全体と可換ホップ代数全体とがカテゴリカルに対応する．有限生成な可換ホップ代数と対応するアフィン群を特に**代数群**と呼ぶ．簡単のため基礎環 $\Bbbk$ を体とする．上記のカテゴリカルな対応により，代数群をホップ代数の理論を用いて研究することが可能になる．実際，竹内光弘は 1970 年代，基礎体 $\Bbbk$ の標数によらない代数群の理論を展開した．そこではハイパー代数がリー代数に替わるものとして中心的役割を果たす．代数群 G に対し，そのハイパー代数 $\mathrm{hy}(G)$ は余可換なホップ代数であり，特に $\Bbbk$ の標数が 0 であれば，G のリー代数 $\mathrm{Lie}(G)$ の普遍包絡代数 $\mathcal{U}(\mathrm{Lie}(G))$ に一致する．

さて近年，物理学におけるスーパー・ストリング理論やスーパー・リー代数の表現論の要請から，スーパー対称性の数学への興味が再び高まっている．位数 2 の有限群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で次数づけられた $\Bbbk$-ベクトル空間全体は，通常のテンソル積といわゆるスーパー対称性により対称テンソル圏をなす．スーパー代数やスーパー・ホップ代数とは，この対称テンソル圏の中の代数対象やホップ代数対象のことである．そして代数群の概念も，同様にスーパーの状況で一般化される．すなわち**スーパー代数群**とは，スーパー可換代数の圏から群の圏への関手であって，有限生成なスーパー可換代数で表現されるものである．スーパー代数群 $\mathbf{G}$ の定義域を可換代数の圏に制限して得られる群関手 $\mathbf{G}_{\mathrm{ev}}$ は代数群であり，$\mathbf{G}$ の**偶部**と呼ばれる．

スーパー群の表現の研究は，非スーパーの表現論にも応用がある点で大変興味深い．スーパー・リー代数を用いた標数 0 のスーパー代数群の表現は古くから研究されている．また Deligne は $\Bbbk$ が標数 0 の代数閉体のときにリジットな対称テンソル圏は，ある緩い条件をみたせば適当なあるスーパー群の表現圏として実現されるということを示した．他方で，正標数のスーパー代数群の表現はまだ始まってまもない．Brundan と Kleshchev (2003) は queer スーパー・リー代数 $\mathfrak{q}(n)$ をそのリー代数にもつスーパー代数群 $\mathbf{Q}(n)$ のモジュラー表現を研究した．これはスピン対称群のモジュラー表現と密接な関係がある．また Brundan と Kujawa (2003) は一般線型スーパー群 $\mathbf{GL}(m|n)$ のモジュラー表現から，正標数の対称群の表現に関する結果である Millineux の定理の別証明を与えている．

表現圏が半単純になるようなスーパー代数群 を線形簡約というが，Weissauer (2003) や Masuoka (2012) によると，線形簡約スーパー群はかなり限られた形になる．一方で Serganova (2011) はより一般の概念として**準簡約スーパー群**を定義した ([3])．スーパー代数群 $\mathbf{G}$ が準簡約であるとは，$\mathbf{G}_{\mathrm{ev}}$ が分裂簡約代数群であるときにいう．前述の $\mathbf{Q}(n)$ や $\mathbf{GL}(m|n)$ は準簡約であり，Fioresi と Gavarini (2013) が構成した古典的単純スーパー・リー代数に対応する Chevalley スーパー群もそうである．このように，準簡約スーパー群は多くの興味深いスーパー群を含む良いクラスである．Serganova は $\Bbbk$ が標数 0 の代数閉体の場合に準簡約スーパー群の構造や表現を研究した．既約表現 $L = L_0 \oplus L_1$ が M **型**（または Q **型**）であるとは，L が自身のパリティー交換 $\Pi L := L_1 \oplus L_0$ と非同型（または 同型）であるときをいう．既約表現の分類には M 型，Q 型の決定も重要である．

本論文の目的．

本論文の目的は，任意標数の体 $\Bbbk$ 上での準簡約スーパー群の構造やその表現を，ホップ代数を用いた統一的な方法 ([1, 2, 4]) によって研究することである．具体的には既約表現の構成とその分類，及びコホモロジーの研究を行う．

本論文の主結果．

基礎体 $\Bbbk$ 上の分裂簡約群 G と，その分裂極大トーラス T を固定する．この G を偶部にもつ準簡約スーパー群を $\mathbf{G}$ とかく．対応するスーパー・トーラスを $\mathbf{T}$ とおき，ボレル部分スーパー群を $\mathbf{B}$ とおく．一般に $\mathbf{T}$ はもはや可換とは限らないことに注意する．Masuoka と Shibata の結果から，局所有限な $\mathrm{hy}(\mathbf{T})$-T-スーパー加群全体と $\mathbf{T}$ の表現全体は一対一に対応する ([1, Collorary 5.10])．これと Clifford 代数の一般論を用いることで，まず $\mathbf{T}$ の既約表現 $\{\mathfrak{u}(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を決定した．この様にこれらは T の指標群 Λ でパラメトライズされている．各 $\mathfrak{u}(\lambda)$ を $\mathbf{B}$ の表現とみて，その誘導表現を

$$H^0(\lambda) := \mathrm{ind}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}(\mathfrak{u}(\lambda))$$

とし，$\Lambda^\dagger := \{\lambda \in \Lambda \mid H^0(\lambda) \neq 0\}$ とおく．この $\Lambda^\dagger$ は $\mathbf{G}_{\mathrm{ev}}$ の支配的ウェイト全体の集合 Λ^+ の部分集合である：$\Lambda^\dagger \subset \Lambda^+$．いま $\mathbf{G}$ の既約表現の同値類全体の集合においてパリティー交換を同一視したものを $\mathbf{Irr}_\Pi(\mathbf{G})$ とかく．すなわち L と L' が $\mathbf{Irr}_\Pi(\mathbf{G})$ で一致するための必要十分条件は $L \cong L'$ または $L \cong \Pi L'$ となる．

主結果 1 (既約表現の構成とパラメータ付け)**.** 各 $\lambda \in \Lambda^\dagger$ に対し，$H^0(\lambda)$ は唯一の既約部分表現 $L(\lambda)$ を含む．対応 $\lambda \mapsto L(\lambda)$ が全単射 $\Lambda^\dagger \to \mathbf{Irr}_\Pi(\mathbf{G})$ を与える．また $L(\lambda)$ が `M` 型，`Q` 型のいずれであるかが，λ に関するある明示的な条件で判別できる．

以下 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$ がよい性質を持つ放物部分スーパー・リー代数を持つと仮定する．前述のスーパー群 $\mathbf{Q}(n)$ はこの条件をみたさないものの，一般線型スーパー群 $\mathbf{GL}(m|n)$ や，タイプ I の古典的単純スーパー・リー代数に対応する Chevalley スーパー群はすべてこの条件をみたしている．

主結果 2. 上記 $\Lambda^\dagger$ は $\mathbf{G}_{\mathrm{ev}}$ の支配的ウェイト全体の集合と一致する：$\Lambda^\dagger = \Lambda^+$．

誘導関手 $\mathrm{ind}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}(-)$ は左完全なので右導来関手 $R^n\mathrm{ind}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}(-)$, $n \geqslant 0$ を考えることができる．これは層コホモロジー $H^n(\mathbf{G}/\mathbf{B}, \mathcal{L}_{\mathbf{G}/\mathbf{B}}(-))$ と同型である．各 $n \geqslant 0$ に対して $H^n(\lambda) := R^n\mathrm{ind}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}(\mathfrak{u}(\lambda))$ とおくとき，Kempf の消滅定理のスーパー・アナローグが成り立つ：

主結果 3. 各 $\lambda \in \Lambda^+$ に対して，$H^n(\lambda) = 0$ が任意の $n > 0$ について成り立つ．

参考文献．

[1] A. Masuoka and T. Shibata, *Algebraic supergroups and Harish-Chandra pairs over a commutative ring*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., (preprint `arXiv:1304.0531`).

[2] A. Masuoka and T. Shibata, *On functor points of affine supergroups*, submitted, (preprint `arXiv:1505.06558`).

[3] V. Serganova, *Quasireductive supergroups*, in: *New Developments in Lie Theory and its Applications*, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI (2011), pp. 141–159.

[4] T. Shibata, *Supergroups over* $\mathbb{Z}$, RIMS Kôkyûroku, No. **1840** (2013), pp. 149–164.